Factor de Riesgo en el Modelo SIR de una Infección

Carles R. Paul
Departamento de Ingenieria, ESUP, Mataró.
1 abril 2020

Introducción

Una de las formas de entender como se propaga una epidemia es utilizando un modelo matemático. En 1927 el bioquímico William Ogilvy Kermanck y el teniente coronel Anderson Gray McKendrick [1] idearon un modelo para interpretar las características de una epidemia, es la base del modelo SIR. Es un modelo sencillo, pero nos bastara para entender cuales son los factores decisivos a tener en cuenta ante una pandemia. El modelo considera que toda la población reacciona de la misma manera ante la enfermedad o infección, es decir, no se dice nada sobre el carácter genético individual. Considera ademas que todos los individuos tienen la misma tasa de transmisión de la enfermedad.

El objetivo de este análisis es determinar que parámetro es fundamental para caracterizar el proceso infeccioso de una pandemia. Siguiendo un esquema sencillo y asequible a cualquier persona interesada con unos mínimos conocimientos matemáticos. Para así conocer cuales son las condiciones que indiquen de que manera los contagiados por la infección disminuirá o bien aumentara y se convertirá en una pandemia.

El Modelo SIR

El modelo clasifica a los individuos en tres tipos de poblaciones. La población de Susceptibles, la población de Infectados y la población de Recuperados. Los definimos mediante las siguientes variables dependientes del tiempo:

S(t): Población Susceptible. Aquellos individuos que pueden ser infectados, los que pueden contagiarse del virus.

I(t): Población Infectada. Aquellos individuos que ya están infectados y pueden transmitir la infección a individuos de la población Susceptible con la que pueden entrar en contacto.

R(t): Población Recuperada. Aquellos individuos que han superado la infección y son inmunes.

N: Población total.

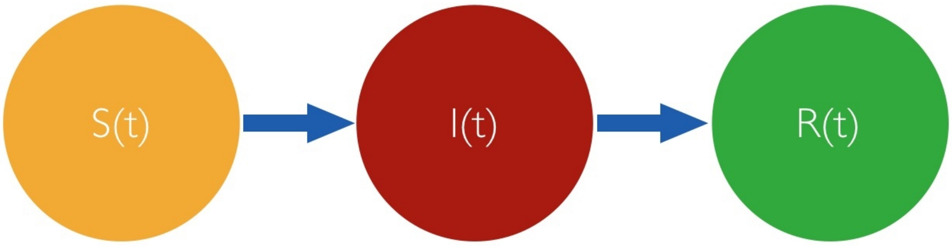


Figura 1: Esquema Modelo SIR

A partir de estas definiciones podemos establecer una primera ecuación que relacione todas las variables anteriores. Queda claro que la población total tiene que estar representada por la población Susceptible más la población Infectada más la población Recuperada. Hay que tener en cuenta que estas variables dependen del tiempo, los Susceptibles pueden pasar Infectados y estos a estar Recuperados, por eso se indican en función del tiempo mediante el paréntesis (t). De esta manera la condición es la siguiente:

$$S\left(t\right)+I\left(t\right)+R\left(t\right)=N$$

Veamos a continuación las características que tiene que cumplir la población susceptible (S). Para que los Susceptibles pasen a ser Infectados se necesita determinar a que ritmo estos pueden contagiarse. Es decir tenemos que establecer cual es la tasa de contagio, este parámetro se determina mediante lo que denominamos la tasa de infección, que denotare mediante la letra **a**.

Consideremos ahora que la cantidad de Susceptibles que puede contagiarse dependerá de la cantidad de Infectados existentes y de la probabilidad que tiene estos a su vez de infectar, parámetro que indica la tasa de infección **a**. Así pues, determinamos que la tasa de contagio es proporcional al número de Infectados y el factor de proporcionalidad de la tasa de infección. Lo indicaremos mediante c(t) y vendrá dado por:

$$c(t)=aI(t)$$

Por tanto el número de individuos que se contagian serán aquellos Susceptibles de ser contagiados, los que denominamos por S(t) multiplicado por la tasa de contagio c(t). Veamos un detalle importante, cuando la población susceptible S(t) se contagia, pasa a ser población Infectada I(t) y por tanto disminuye de la población S(t). Así pues la ecuación diferencial que modela la variación de la población S(t) es negativa, indicando que la población S(t) disminuye y pasa a ser Infectada I(t), escribimos.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -c(t)I(t) = -aS(t)I(t)$$

Veamos ahora las características que tiene que cumplir la población de infectados I(t). Una primera propiedad inmediata es que la población I(t) aumenta al mismo ritmo que disminuye la población S(t). Pero habrá que restar aquellos que se recuperan, los que dejan de ser infectados para pasar a ser Recuperados.

Consideramos pues que la tasa de recuperación viene determinada por la letra **b**. Así pues la cantidad de Recuperados es proporcional a la cantidad de Infectados por la tasa de recuperación, el resultado es el siguiente

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

Así pues, directamente la variación de la población de Recuperados vendrá indicada por la siguiente ecuación.

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t)$$

En resumen, el sistema de ecuaciones que determinan las variaciones de las variables S(t), I(t) y R(t) es lo que se denomina un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (aS(t) - b)I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t) \tag{3}$$

Obtenemos que las tres poblaciones están modeladas por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no lineales dependientes del tiempo y se le denomina el modelo SIR.

El sistema anterior no puede resolverse analiticamente y tiene que ser resuelto numéricamente, pero puede obtenerse información cualitativa.

Observamos que el modelo cumple la condición necesaria de mantener la población N constante.

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

Planteamiento a partir de las Condiciones Iniciales

Partimos del conocimiento de las poblaciones en el instante inicial, es decir en t=0. En estas condiciones tendremos que

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0 \\ I(0) &= I_0 \\ R(0) &= R_0 \end{aligned}$$

Establecemos la ecuación diferencial a partir del estado inicial con una población de susceptibles S_0.

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = I(aS_0 - b)$$

Esta ecuación es fácilmente integrable

$$\int_0^{I(t)} \frac{dI}{I} = (aS_0 - b)\int_0^t dt$$

$$\ln I(t) = (aS_0 - b)t = b(\frac{aS_0}{b} - 1)t$$

Definimos por $R_0 = aS_0/b$ y de esta manera se obtiene la ecuación para I(t)

$$I(t) = \exp(R_0 - 1)bt$$

El resultado es una función exponencial cuyo carácter creciente o decreciente depende de si su exponente es positivo o negativo.

Veamos el tipo de comportamiento de la función según el signo del exponente en la Figura 2 y 3.

- Gráfica exponencial con exponente positivo

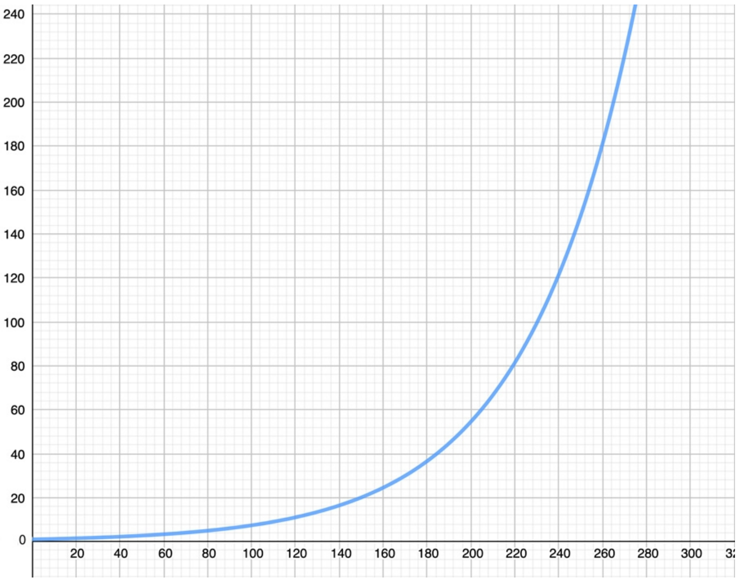


Figura 2: función exponencial con exponente positivo

Podemos comprobar que la función es siempre creciente y cada vez aumenta con mayor rapidez.

- Grafica exponencial con exponente negativo

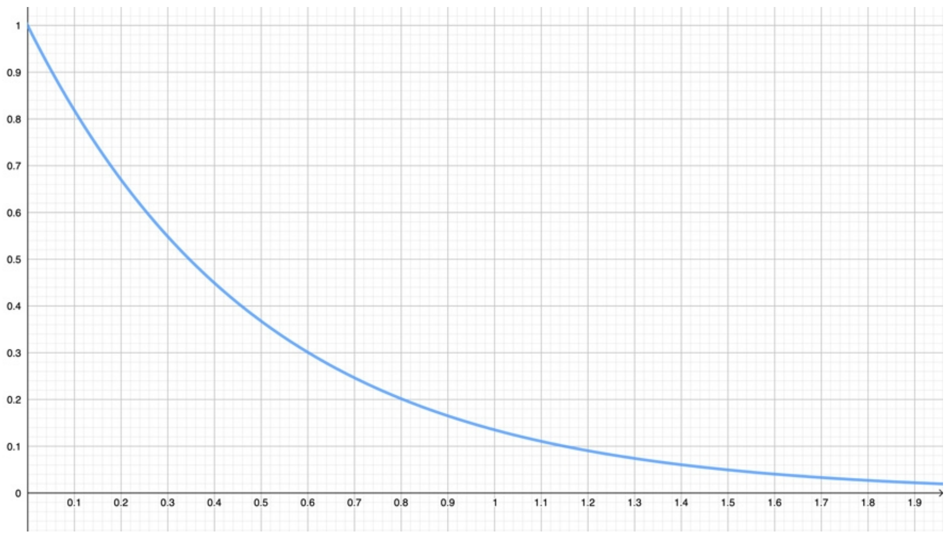
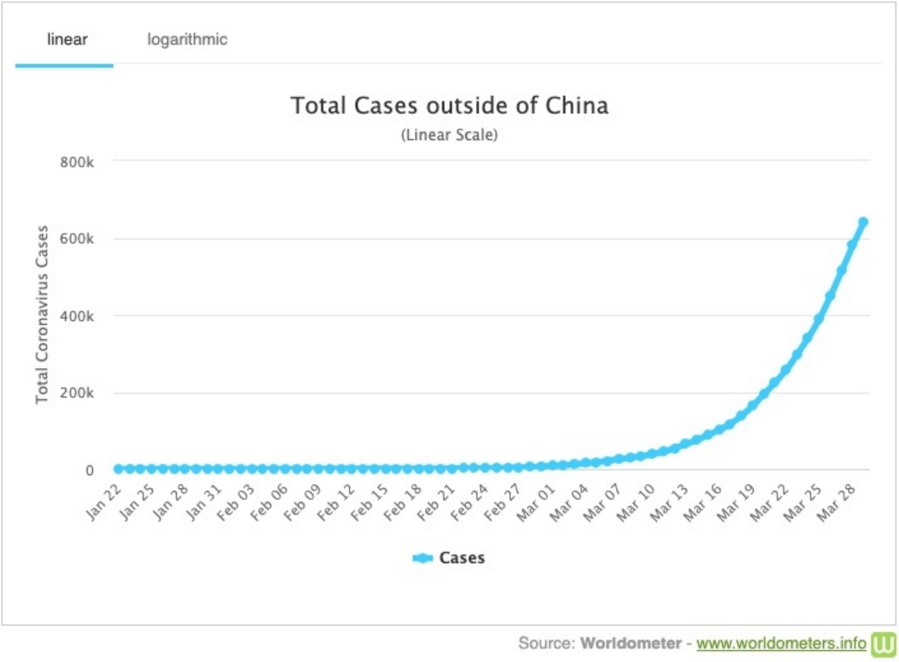


Figura 3: función exponencial con exponente negativo

En este caso la función es decreciente y decrece cada vez con mayor rapidez.

Si nos fijamos en las gráficas de infectados por el coronavirus COVID19, observamos que en la fase inicial de la expansión del virus la exponencial es de exponente positivo.



El factor de riesgo R_0

Si volvemos a la ecuación exponencial del número de infectados en un tiempo t podemos observar que el factor R_0 es decisivo, lo denominamos el factor de riesgo. Si este factor de riesgo es mayor que 1 el exponente será positivo y si es menor que 1 el exponente será negativo. De esta manera sencilla se puede determinar que condiciones tienen que cumplirse para que el factor de riesgo sea menor que 1. Condición que podemos considerar obvia al comparar en la ecuación (2) del sistema diferencial SIR sus dos términos, uno positivo y el otro negativo. El positivo (aS_0) tiende a aumentar el número de infectados y el negativo (b) a disminuirlo, pero ahora conocemos que el carácter dominante de estos parámetros críticos es exponencial.

Obtenemos pues que la condición para que la infección no se propague es la siguiente:

$$R_0 = \frac{aS_0}{b} < 1$$

El parámetro **a** es la tasa de infección y se encuentra en el numerador, por tanto para reducir el factor de Riesgo se tiene que disminuir el parámetro **a**. Esta condición obliga a conseguir una baja transmisión de la enfermedad, conclusión que ya nos parecía evidente. Para disminuir el parámetro **a** es fundamental:

- Confinar a la población para disminuir los contactos en una fase inicial.
- Aplicar estrictamente medidas de higiene, como lavarse bien las manos con jabón.
- Aplicar estrictamente medidas de protección, como utilizar mascarillas adecuadas y guantes.

El parámetro S_0 también se encuentra en el numerador y por tanto se tiene que disminuir al máximo la cantidad de población susceptible de ser infectada, esto se consigue:

- Confinando la población en sus casas para evitar el contacto de los susceptibles con los infectados.
- Efectuar una campaña de vacunas, para aumentar la inmunidad de los susceptibles.

El parámetro b se encuentra en el denominador y por tanto tiene que alcanzar un valor elevado. Recordemos que b es la tasa de recuperación y para que tenga un valor elevado tienen que cumplirse estas condiciones.

- Conseguir un antiviral.
- Aplicar las medidas medicas y sanitarias adecuadas.

Y esto se consigue no colapsando el sistema hospitalario, que se obtiene confinando a la población en sus casas para disminuir al máximo los infectados. Y es por tanto importantísimo disponer de un buen sistema sanitario público.

Número máximo de Infectados

Veamos a continuación como determinar el máximo de Infectados, I_M. Partimos de las dos primeras ecuaciones diferenciales donde simplificamos la notación.

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$
$$\frac{dI}{dt} = (aS - b)I$$

Buscamos la relación entre los infectados I respecto los Susceptibles S,

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI}{dt}\frac{dt}{dS} = \frac{(aS-b)I}{-aSI} = \left(\frac{b}{aS} - 1\right)$$

Definimos el cociente a/b como el factor q, de esta manera la ecuación anterior nos queda

$$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{qS} - 1$$

Integramos la ecuación diferencial anterior

$$\int dI = \int (\frac{1}{qS} - 1)dS$$

$$I = -S + \frac{1}{q}\ lnS + C$$

donde C es una constante de integración. Ante este resultado podemos establecer la siguiente relación

$$I + S - \frac{1}{q}\ lnS = C$$

la cual nos dice que el término situado a la izquierda de la igualdad se mantiene invariante respecto el tiempo, es decir, se mantiene constante. Veamos la característica gráfica de la ecuación anterior en la siguiente Figura 4.

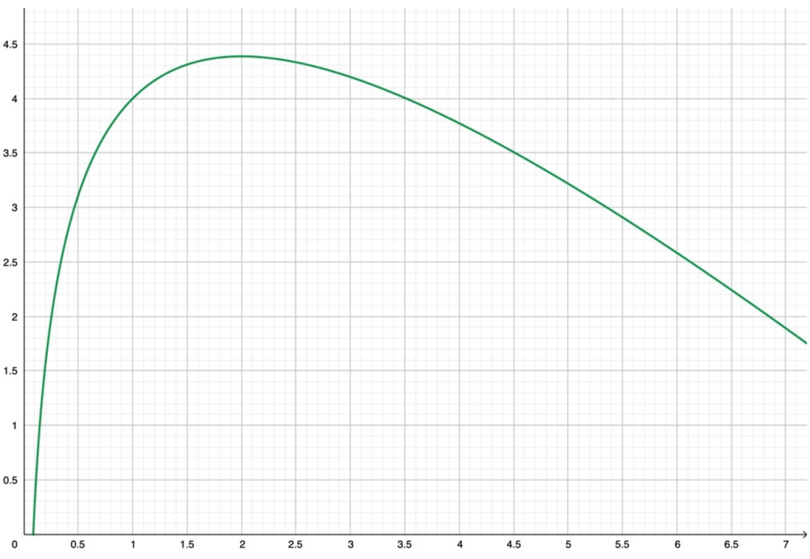


Figura 4: Grafica de Infectados respecto Susceptibles

Observamos que presenta un máximo y por tanto algunos parámetros serás los determinantes de este valor máximo

Dada lo constancia temporal de la función podemos escribir la siguiente relación entre los valores máximos y los valores iniciales

$$I_M + S_M - \frac{1}{q}\ lnS_M = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}\ lnS_0$$

Ahora nos falta conocer cual es la condición que deben cumplir los Susceptibles en el máximo de Infectados. Esta condición se establece mediante la siguiente relación máxima

$$\left(\frac{dI}{dS}\right)_{max} = 0 \Rightarrow \frac{1}{qS_M} - 1 = 0 \Rightarrow S_M = \frac{1}{q}$$

que sustituimos en la ecuación anterior obteniendo la relación

$$I_M + \frac{1}{q} - \frac{1}{q}\ln q = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}\ lnS_0$$

y aislando I_M

$$I_M = I_0 + S_0 - \frac{1}{q}\left(1 + \ln(qS_0)\right)$$

Fijemonos que precisamente qS_0 es el factor crítico R_0 , representemos pues el valor máximo de infectados en función del factor crítico R_0 , obtenemos.

$$I_M = I_0 + S_0\left\{1 - \frac{1}{R_0}(1 + \ln R_0)\right\}$$

El número máximo de infectados disminuye según la siguiente función

$$R(R_0) = \frac{1}{R_0}(1 + \ln R_0)$$

Determinamos el máximo de esta función a partir de la condición de extremo

$$\left(\frac{dR(R_0)}{dt}\right)_{max} = 0$$

$$\frac{dR(R_0)}{dt} = -\frac{1}{R_0^2}\left(1 + lnR_0\right) + \frac{1}{R_0^2} = -\frac{1}{R_0^2}lnR_0 = 0$$

Cuya solución es $R_0 = 1$, la cual podemos comprobar también de forma gráfica en la siguiente figura 5.

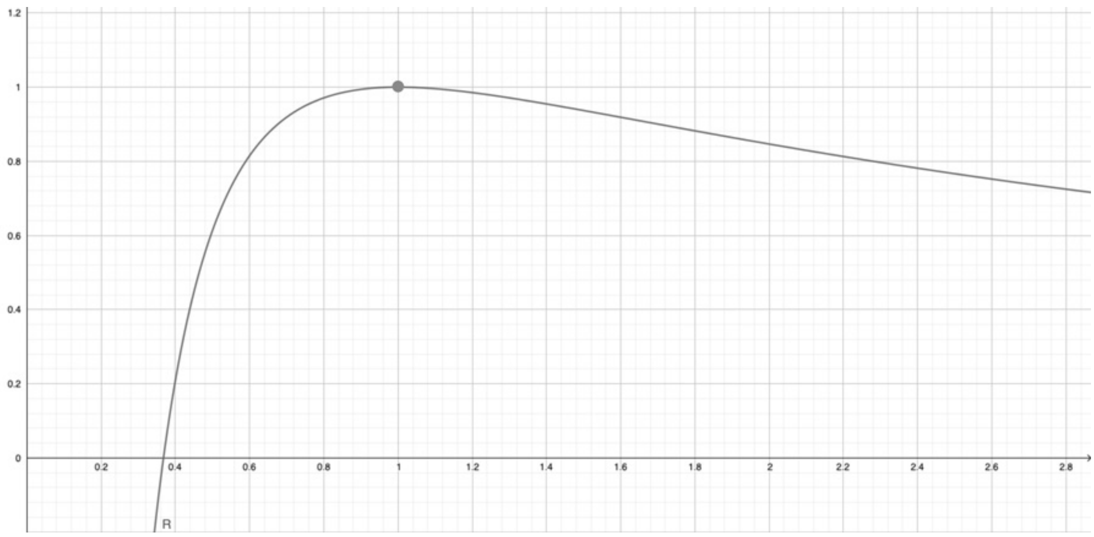


Figura 5: Grafica de la función R(Ro)

Así pues la condición $R_0 = 1$ es un máximo de la función $R(R_0)$ y normalmente el valor de R_0 se encontrara entre el valor mínimo de 0 y el valor máximo de 1.

Volvemos a encontrar, como era de esperar, que la condición sobre el factor de riesgo sea menor que 1. Y esta condición matemática conlleva a la elaboración de toda una serie de protocolos destinados a disminuir la propagación de la infección y disminuir el número de muertos. Al mismo tiempo que disminuye la probabilidad que el virus vuelva a aparecer con mayor virulencia en la siguiente fase estacional. Dado que muchos virus siguen estas fases estacionales, como muestra el gráfico en el Anexo 1.

Conclusiones

Hemos comprobado mediante un sencillo modelo SIR que la actuación inmediata sobre la contención de la población es un medida eficaz para evitar los contagios. En la China se tomaron las medidas de confinamiento en forma estricta. Kraemer [2] nos indica en su articulo que la movilidad humana contribuyó a la rápida expansión del virus COVID-19 y como las medidas de control y contención de esta movilidad contribuyeron a frenar este avance. La Figura 6 indica como disminuyeron drásticamente la movilidad después de implementar el cordón sanitario el 23 de enero.

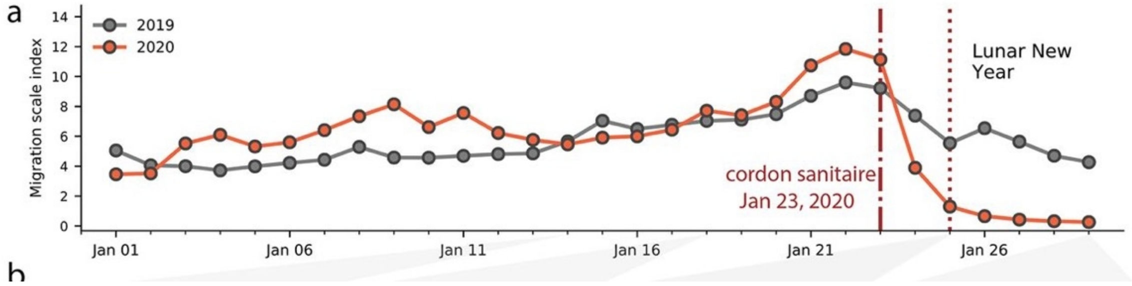


Figura 6: Cordón Sanitario implantado en Wuhan. Kraemer [2]

José Lourenço en un articulo prepint indica que las simulaciones realizadas con modelos SIR mucho más sensibles, indican una duración de la epidemia entre dos y tres meses si no se realiza ninguna intervención.

George Gao, jefe del Centro Chino para el Control de Enfermedades y Prevención indica en una entrevista en Science [4] que la Primera acción es mantener la distancia social. Esta es la estrategia esencial para el control de cualquier enfermedad infecciosa, especialmente si es una infección respiratoria. Segundo hay que mantener aislada a la población infecciosa. Tercero, los que han contactado con los infecciosos tienen que permanecer en cuarentena. Hay que realizar todos los esfuerzos necesarios para encontrar todos estos contactos y asegurarse que siguen aislados y cumplen la cuarentena. En Cuarto lugar hay que suspender las reuniones públicas y en Quinto lugar restringir el movimiento y confinar a la población, lo que se denomina efectuar un cordón sanitario.

George Gao asegura además que el gran error en Estados Unidos y Europa es que las personas no usan máscaras y de esta manera el virus se propaga rápidamente de las personas infectadas a las susceptibles.

El 23 de enero a ls 10:00h se prohibió todo el transporte en la ciudad de Wuhan, seguido de toda la provincia de Hubei un día después, según un articulo de Huaiyu Tian[5]. Es el mayor cordón sanitario desarrollado en toda la historia, declarando el nivel 1 de emergencia en China, definido como "incidente extremadamente serio". Aparte de la prohibición de viajar se cerraron los colegios y universidades, se aislaron los casos infectados y se suspendió todo el transporte público. Según Tian, las medidas estrictas de confinamiento iniciadas en la ciudad de Wuhan están fuertemente relacionadas con el retraso del crecimiento del virus y la reducción del número de infectados durante los primeros 50 días de la epidemia de COVID-19 en China. Indica también que su modelo matemático sigue una exponencial positiva si no existe ninguna acción de contención ni declaración de alarma general. Sin embargo la curva disminuye cuando se aplican medidas de contención y emergencia.

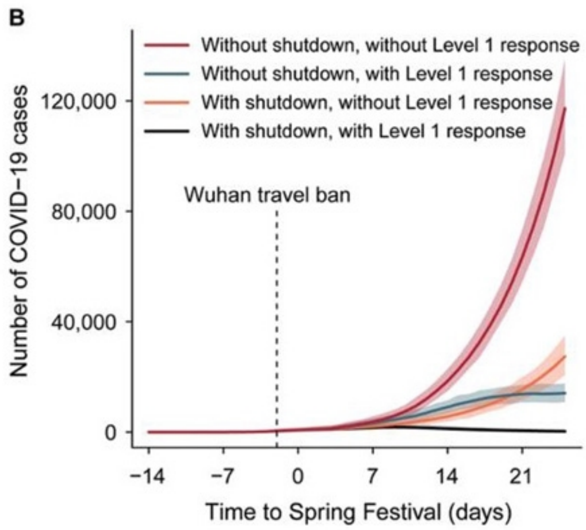


Figura 7: Modelo Matemático. Tian [5]

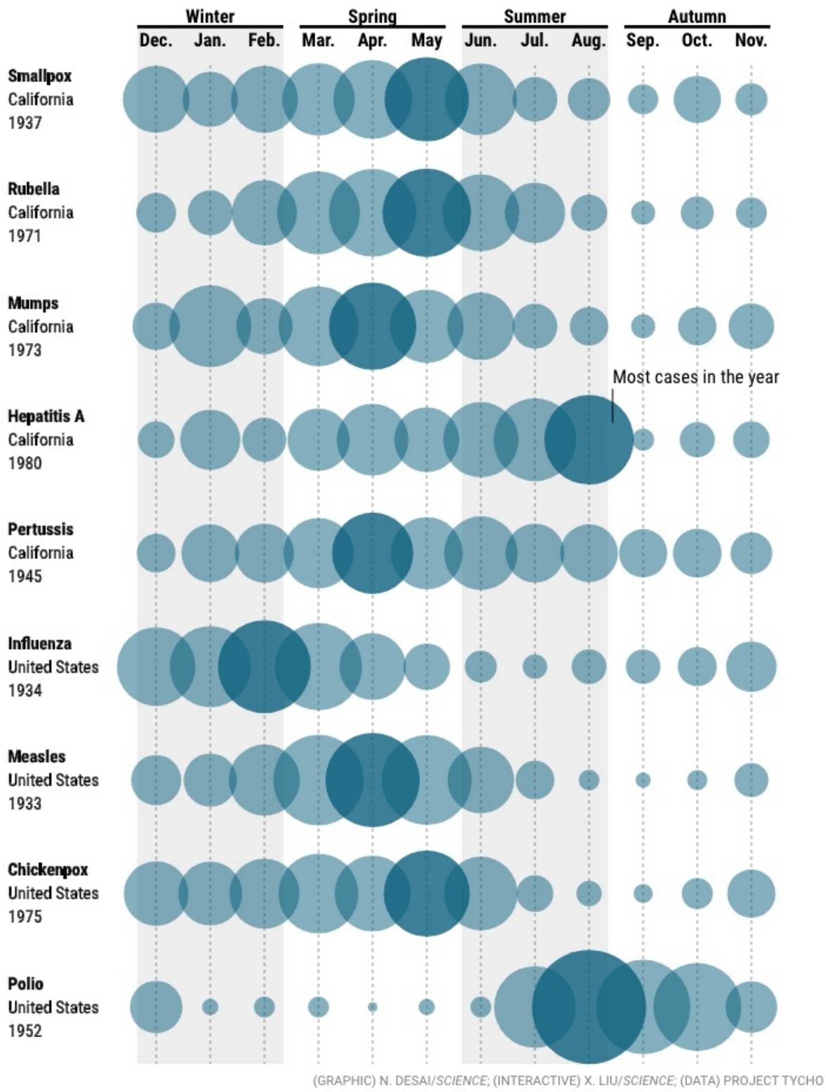
Actualmente (1 abril 2020) no podemos aventurar cuando terminará el proceso infeccioso del COVID-19. Pero si podemos asegurar que este tiempo podría haberse reducido si se hubieran tomado las medidas adecuadas notoriamente conocidas y por supuesto se podrían haber evitado una mayor cantidad de muertes.

Seguramente hay que tener en cuenta los daños que pueden ocasionar estas medidas tan drásticas de confinamiento tanto en el ámbito económico como en el social. Pero la lección de la China nos da a conocer que la acción drástica de emergencia inmediata reduce el tiempo de exposición a la infección y por tanto sus efectos nocivos, al mismo tiempo que no colapsa el sistema sanitario excesivamente. De esta manera también se reduce el tiempo de vuelta a la “normalidad”. Esta claro que habrá que hacer muchos estudios sobre el procedimiento de la China y en su contraparte de Europa y de Estados Unidos.

Sin embargo es indiscutible que es inevitable una nueva pandemia sobre un nuevo virus o bacteria, dada la rapidez de crecimiento y mutación. Es por eso que las medidas adecuadas son dedicar mayores recursos a la sanidad pública y a una mejor educación sanitaria, que pasa por dedicar mayores recursos a una mejor educación pública. Solo los profesionales preparados son capaces de hacer grandes logros en tiempos difíciles.

Anexo

Gráfica sobre la estacionalidad de los virus, según el articulo de John Cohen [6]



Bibliografia

[1] W.O. Kermack and A.G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. R. Soc. Lond, 115(1927), 700-721.

[2] Kraemer. The effect of human mobility and control measures on the COVID-19 epidemic in China. Science. Mar. 25, 2020.

[3] José Lourenço. Fundamental principles of epidemic spread highlight the immediate need for large-scale serological surveys to assess the stage of the SARS-CoV-2 epidemic.

[4] Not wearing masks to protect against coronavirus is a 'big mistake,' top Chinese scientist says. Sience. Mar. 27, 2020.

[5] Huaiyu Tian. An investigation of transmission control measures during the first 50 days of the covid-19 epidemic in China. Science 10.1127/science.abb6105 (2020)

[6] John Cohen. Why do dozens of diseases wax and wane with the seasons—and will COVID-19?.Science Mar. 13, 2020.